

Corrigé de Banque PT 2008 - Épreuve B

Preliminaire

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur \mathbb{R}

- \iff son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} et la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante,
 \iff la somme des dimensions des espaces propres de A est égale à n .

Toute autre caractérisation, comme par exemple l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, est hors programme PT.

Partie I

1. Il faut traiter la question 2 avant la question 1 (cf. la remarque précédente).

2. $\chi_{A_\varphi}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 - (1-X) = (1-X)[(1-X)^2 - 1] = (1-X)(X^2 - 2X).$

Finalement $\chi_{A_\varphi}(X) = -X(X-1)(X-2)$ donc les valeurs propres de A_φ sont 0, 1, 2 et elles sont toutes les trois simples. On sait que pour une valeur propre simple, l'espace propre associé est de dimension 1, donc les trois sous-espaces propres de A_φ sont des droites, et A_φ est diagonalisable d'après la CNS préliminaire.

3. \triangleright Le vecteur $c_1 = (1, -1, 0)$ appartient à $\text{Ker}(\varphi)$ car les deux premières colonnes de A_φ sont égales.

\triangleright On a $A_\varphi - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 = C_2 + C_3$

donc le vecteur $c_2 = (1, -1, -1)$ est vecteur propre de φ pour la valeur propre 1.

\triangleright On a $A_\varphi - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les seconde et troisième colonnes sont opposées donc $c_3 = (0, 1, 1)$

est vecteur propre de φ pour la valeur propre 2.

La famille (c_1, c_2, c_3) est une base de diagonalisation de φ .

4. $D_1 = \text{Vect}(c_1) = \text{Ker}(\varphi)$ est stable par φ car $\varphi(D_1) = \{0\} \subset D_1$.

5. Soit $u \in P_1$, montrons que $\varphi(u) \in P_1$. Il existe deux réels λ et μ tels que $u = \lambda c_2 + \mu c_3$, donc par linéarité $\varphi(u) = \lambda\varphi(c_2) + \mu\varphi(c_3) = \lambda c_2 + 2\mu c_3 \in P_1$ comme voulu.

Partie II

1. A_f et A_g sont des matrices symétriques réelles, donc d'après le cours elles sont diagonalisables.

2. Il est équivalent de démontrer que les matrices de f et de g commutent, or :

$$A_f \times A_g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A_g \times A_f.$$

3. On a $A_f - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 2 donc son noyau est de dimension 1 et contient le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{Ker}(A_f - I_3) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et par suite $\text{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}(1, 1, 0)$. On vérifie que le vecteur $(1, 1, 0)$ est aussi vecteur propre pour g (pour la même valeur propre, ce qui est fortuit).

4. On a $A_f + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1 donc son noyau est de dimension 2 et contient manifestement les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui sont indépendants, donc $\text{Ker}(A_f + I_3)$ est le plan engendré par ces deux vecteurs. Si on note $c_4 = (1, -1, 0)$ et $c_5 = (0, 0, 1)$ on constate que $g(c_4) = 2c_4$ et $g(c_5) = c_5$ donc, exactement comme à la question I.5, $\text{Vect}(c_4, c_5)$ est stable par g .

Partie III

1. $\chi_{A_\phi}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X) + 1 + (1-X) = -X^3 + 4X^2 - 6X + 4$

et donc : $\boxed{\chi_{A_\phi}(X) = -(X-2)(X^2 - 2X + 2)}$.

2. Le facteur $X^2 - 2X + 2$ est irréductible sur \mathbb{R} (discriminant strictement négatif) ce qui signifie que le polynôme caractéristique de A_ϕ n'est pas scindé sur \mathbb{R} , donc A_ϕ n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} (ni même trigonalisable).

3. Si $\mathbb{R}.u$ est stable par ϕ alors en particulier $\phi(u) \in \mathbb{R}.u$ donc il existe un réel λ tel que $\phi(u) = \lambda u$ et donc u , qui n'est pas nul, est un vecteur propre de ϕ . La réciproque est encore plus évidente (le résultat vaut bien sûr pour tout endomorphisme).

L'espace propre associé à l'unique valeur propre de ϕ est de dimension 1 car cette valeur propre est simple. Il y a donc une unique droite vectorielle stable par ϕ c'est $\text{Ker}(\phi - 2id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}(1, 1, 1)$.

4. ϕ est injectif car 0 n'est pas valeur propre, il est donc bijectif car \mathbb{R}^3 est de dimension finie.

5. ϕ établit un isomorphisme de F sur $\phi(F)$ donc ces deux espaces vectoriels ont même dimension.

Autre idée : appliquer le théorème du rang à la restriction $\phi|_F = \begin{pmatrix} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \phi(x) \end{pmatrix}$:

$$\underbrace{\dim \mathfrak{Im}(\phi|_F)}_{=\phi(F)} + \underbrace{\dim \text{Ker}(\phi|_F)}_{=\{0\}} = \dim F$$

6. Si F est stable par ϕ on a : $\phi(F) \subset F$ et $\dim \phi(F) = \dim F$ d'où l'égalité $\phi(F) = F$. Réciproque évidente.

7.(a) IL fallait comprendre : « Donner la matrice de ψ relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R} », car ψ n'est pas un endomorphisme de \mathbb{R}^3 . C'est $(\alpha \ \beta \ \gamma)$.

7.(b) Après avoir remarqué que $H = \text{Ker } \psi$, on écrit :

$$\text{Ker } \psi \circ \phi = \{u \in \mathbb{R}^3, \psi(\phi(u)) = 0\} = \{u \in \mathbb{R}^3, \phi(u) \in \text{Ker } \psi\} = \{u \in \mathbb{R}^3, \phi(u) \in H\} = \phi^{-1}(H).$$

7.(c) Utilisons la question 6 et le fait que ϕ est bijectif :

$$H \text{ est stable par } \phi \iff \phi(H) = H \iff H = \phi^{-1}(H) \iff \text{Ker } \psi = \text{Ker } \psi \circ \phi.$$

7.(d) H est de dimension 2 car c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle de \mathbb{R}^3 (un *hyperplan* de \mathbb{R}^3).
 En effet, d'après le théorème de rang :

$$\dim \underbrace{\mathfrak{Im}(\psi)}_{=\mathbb{R}} + \dim H = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Soit F un supplémentaire de H . On a l'égalité demandée par définition du supplémentaire et de plus F est de dimension $3 - 2 = 1$.

7.(e) Soit u un vecteur non nul de F . On a : $F = \mathbb{R}.u$, donc $\alpha = \psi_1(u) \neq 0$ sans quoi ψ_1 serait identiquement nulle, et de même $\beta = \psi_2(u) \neq 0$. On pose alors $\lambda = \alpha/\beta \neq 0$ et on montre que ce réel convient : pour tout $x \in F$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = tu$. On a $\psi_1(x) = t\alpha = \lambda t\beta = \lambda\psi_2(x)$.

7.(f) Supposons que $\psi \circ \phi = \lambda\psi$ avec $\lambda \neq 0$. Alors d'évidence $\text{Ker } \psi \circ \phi = \text{Ker } \psi$ donc d'après (c) H est stable par ϕ .

Réciproquement, supposons que H est stable par ϕ . D'après (c) on a $\text{Ker } \psi \circ \phi = \text{Ker } \psi = H$ et si on note ψ_1 et ψ_2 les restrictions respectives de $\psi \circ \phi$ et de ψ à F , ces deux formes linéaires ne sont pas identiquement nulles sur F (car $F \cap H = \{0\}$) et donc la question précédente s'applique, ce qui donne $\lambda \neq 0$ tel que :

$$\forall x \in F, \quad \psi \circ \phi(x) = \lambda\psi(x).$$

Ainsi les deux applications linéaires $\psi \circ \phi$ et $\lambda\psi$ coïncident sur H (où elles sont nulles) et sur F , donc elles coïncident sur $H \oplus F = \mathbb{R}^3$.

7.(g) H est stable par ϕ si et seulement si $(\alpha \ \beta \ \gamma) \times A_\phi = \lambda(\alpha \ \beta \ \gamma)$, c'est-à-dire, en transposant, si et seulement si : ${}^t A_\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ce qui signifie que le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, qui est non nul, est un vecteur propre de ${}^t A_\phi$.

7.(h) ${}^t A_\phi$ à le même polynôme caractéristique que A_ϕ , donc sa seule valeur propre est 2 et celle-ci est simple. ${}^t A_\phi - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Ainsi il y a un unique plan stable par ϕ et c'est :

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\} = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1)).$$

Partie IV

« Espace euclidien de dimension finie » est bien sûr un pléonasme.

1. f_α est bien définie de E dans E et on vérifie facilement sa linéarité.

2. Soit x dans E , on a :

$$\begin{aligned} f_\alpha(f_\beta(x)) &= f_\beta(x) + \alpha \langle f_\beta(x) | a \rangle a = x + \beta \langle x | a \rangle a + \alpha \langle x + \beta \langle x | a \rangle a | a \rangle a \\ &= x + \beta \langle x | a \rangle a + \alpha \langle x | a \rangle a + \alpha\beta \underbrace{\langle x | a \rangle \langle a | a \rangle}_{=1} a \\ &= x + (\alpha + \beta + \alpha\beta) \langle x | a \rangle a = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}(x). \end{aligned}$$

C'est donc aussi égal à $f_\beta(f_\alpha(x))$ en échangeant le rôle des lettres α et β .

3. On a $\langle x | f_\alpha(y) \rangle = \langle x | y + \alpha \langle y | a \rangle a \rangle = \langle x | y \rangle + \alpha \langle x | a \rangle \langle y | a \rangle$ et le résultat est symétrique en les lettres x et y , donc ça vaut autant $\langle y | f_\alpha(x) \rangle$ ou encore $\langle f_\alpha(x) | y \rangle$.

4. $f_\alpha(a) = (1 + \alpha)a$ (car $\|a\| = 1$) et a n'est pas nul donc c'est un vecteur propre de f_α pour la valeur propre $1 + \alpha$.

5. $(f_\alpha - id_E)(x) = \alpha \langle x|a \rangle a$, donc $\text{Ker}(f_\alpha - id_E) = \{x \in E, \langle x|a \rangle = 0\} = (\mathbb{R}.a)^\perp$. Ce noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ car $\dim E \geq 2$ donc 1 est bien valeur propre de f_α et l'espace propre associé est $(\mathbb{R}.a)^\perp$ qui a pour dimension $n - 1$.

L'endomorphisme f_α est diagonalisable car c'est un endomorphisme symétrique réel (question 3).

Autre idée : la somme des dimensions des espaces propres est au moins (et donc exactement) $1 + n - 1 = n = \dim E$. Notons quand même que les valeurs propres 1 et $1 + \alpha$ sont bien distinctes ($\alpha \neq 0$).

6. Notons (e_2, \dots, e_n) une base orthonormée de $(\mathbb{R}.a)^\perp$. Alors $\mathcal{B} = (a, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E qui diagonalise f_α . En effet, la matrice de f_α dans cette base est :

$$[f_\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\det(f_\alpha) = 1 + \alpha$ donc f_α est inversible si et seulement si $\alpha \neq -1$. Dans ce cas, en utilisant l'expression de la question 2 : $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$ ou bien en inversant cette matrice diagonale, on voit que $(f_\alpha)^{-1} = f_\beta$ ou β est tel que $1 + \beta = \frac{1}{1 + \alpha}$ c'est-à-dire $\beta = \frac{-\alpha}{1 + \alpha}$. Ainsi : $\forall \alpha \neq -1, (f_\alpha)^{-1} = f_{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}$.

7. f_α est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est une matrice orthogonale. Or la précédente matrice est orthogonale si et seulement si $1 + \alpha = \pm 1$ c'est-à-dire $\alpha = -2$ (car α ne peut être nul).

La matrice de f_{-2} est celle de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}.a)^\perp$.

8. Soit F sev de E stable par f_α , montrons que F^\perp est encore stable par f_α : soit $x \in F^\perp$, montrons que $f_\alpha(x) \in F^\perp$. Il s'agit de démontrer que :

$$\forall y \in F, \langle f_\alpha(x)|y \rangle = 0.$$

D'après la question 3 ceci vaut $\langle f_\alpha(y)|x \rangle$. Or $f_\alpha(y) \in F$ (car $y \in F$ et F est stable) et $x \in F^\perp$, donc le dernier produit scalaire écrit est bien nul.